Министерство образования и науки РФ
Совет ректоров вузов Томской области

Открытая региональная межвузовская олимпиада 2015-2016

МАТЕМАТИКА

8-9 класс

II этап

1. Пройдя 3/8 длины моста, ослик Иа-Иа заметил сзади на дороге автомобиль, идущий со скоростью 60 км/ч. Если ослик побежит назад, то встретится с автомобилем в начале моста, а если вперед, то автомобиль нагонит его в конце моста. С какой скоростью бегает Иа-Иа?

(7 баллов)

Ответ: 15 км/час.

2. Решить уравнение $\dfrac{\left(\sqrt{-x}\right)^2+\sqrt{x^2}}{2x^2}=2016$.

(8 баллов)

Ответ: $-\dfrac{1}{2016}$

3. Известно, что числа a, b, c и d — целые и $\dfrac{a-b}{c-d}=\dfrac{a+b}{c+d}$. Может ли выполняться равенство $abcd = 2016$?

(10 баллов)

Решение. Преобразуем данное равенство:

$$(a-b)(c+d)=(a+b)(c-d)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ac+ad-bc-bd=ac-ad+bc-bd \Leftrightarrow ad=bc\,.$$

Предположим, что $abcd = 2016$. Тогда $(ad)^2 = 2016$, что невозможно, так как число 2016 не является квадратом никакого целого числа..

Ответ: нет, не может.

4. На доске написаны целые числа от 1 до 10. Разрешается одновременно прибавлять или вычитать единицу к любым двум числам. Можно ли за несколько таких операций добиться, чтобы все числа стали равными?

(10 баллов)

Решение. Сумма исходных чисел нечетна (равна 55). Так как одновременно эта сумма изменяется на два или не изменяется, то она всегда остается нечетной. Так как сумма десяти одинаковых целых чисел четна, то добиться, чтобы они стали равными нельзя.

Ответ: нет, нельзя.

5. В параллелограмме $ABCD$ точка M лежит на диагонали BD и делит ее в отношении 2:3. Найдите площадь параллелограмма, если площадь четырехугольника $ABCM$ равна 60.

(10 баллов)

Решение. *1-й случай.* Пусть BM : MD = 2 : 3, то есть точка M ближе к точке B.

$$BD = 5x;\ \frac{S_{ABD}}{S_{ABM}} = \frac{S_{BCD}}{S_{BCM}} = \frac{BD}{BM} = \frac{5}{2}\ ,$$

как треугольники, имеющие равные высоты, проведенные к соответствующим сторонам.

$$S_{ABD} = S_{BCD}\,,\ S_{BCM} = \frac{2}{5}S_{BCD}\,,\ S_{ABM} = \frac{2}{5}S_{ABD}\,;$$

$$S_{ABM} + S_{BCM} = \frac{2}{5}S_{ABD} + \frac{2}{5}S_{BCD}\,;$$

$$S_{ABCM} = \frac{4}{5}S_{ABD}\,,\ 60 = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot S_{ABCD}\,;\ S_{ABCD} = 150\,.$$

2-й случай. Пусть BM : MD = 3 : 2, то есть точка M ближе к точке D.

$$BD = 5x;\ \frac{S_{ABD}}{S_{ABM}} = \frac{S_{BCD}}{S_{BCM}} = \frac{BD}{BM} = \frac{5}{3};$$

$$S_{ABD} = S_{BCD}\,,\ S_{ABM} = \frac{3}{5}S_{ABD}\,,\ S_{BCM} = \frac{3}{5}S_{BCD}\,;$$

$$S_{ABM} + S_{BCM} = \frac{3}{5}S_{ABD} + \frac{3}{5}S_{BCD}\,;$$

$$S_{ABCM} = \frac{6}{5}S_{ABD}\,,\ 60 = \frac{6}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot S_{ABCD}\,;\ S_{ABCD} = 100\,.$$

Ответ: 150 или 100.

6. Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 19 имеет остаток 16, при делении на 20 имеет остаток 17, при делении на 21 имеет остаток 18.

(15 баллов)

Решение. По условию задачи имеем $n = 19p + 16$, $n = 20q + 17$, $n = 21l + 18$. Отсюда следует, что число $n+3$ делится без остатка на 19, 20 и 21. Так как числа 19, 20 и 21 взаимно просты, то наименьшим числом, делящимся на 19, 20 и 21 будет являться число $n + 3 = 19\cdot 20\cdot 21 = 7980$, отсюда $n = 7980 - 3 = 7977$.

Ответ: 7977.

Внимание! Задача считается решенной, если, помимо правильного ответа, приведены необходимые объяснения.

Желаем успеха!